3.2 洛必达法则

伯努利法则（Bernoulli's rule）

约翰·伯努利

3.2.1 $\frac{0}{0}$型未定式

3.2.2 $\frac{\infty}{\infty}$型未定式

3.2.3 其他未定式

3.2.1 $\frac{0}{0}$ 型未定式

在自变量的同一变化过程中：

$$\lim f(x)=0=\lim F(x) \quad \lim f(x)=\infty=\lim F(x)$$

那么极限$\lim\dfrac{f(x)}{F(x)}$可能存在，也可能不存在

如：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ $\quad$ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin\frac{1}{x}}{x}$不存在

定理 3.2.1 (L' Hospital法则)

1) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} F(x) = 0$

2) $\boldsymbol{f(x)}$与$\boldsymbol{F(x)}$在$\boldsymbol{U^o(a)}$内可导， 且$F'(x) \neq 0$

3) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{F'(x)}$ 存在或为∞

$$\Longrightarrow \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{F(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{F'(x)}$$

定理： 1) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} F(x)=0$

2) $f(x)$与$F(x)$在$U^o(a)$内可导，且$F'(x)\neq 0$

3) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{F'(x)}$ 存在或为 ∞ $\Rightarrow \lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{F(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{F'(x)}$

证明 不妨假设 $f(a)=F(a)=0$，在条件中的邻域内任取 $x\neq a$，则 $f(x),F(x)$在以x, a 为端点的区间上满足柯西定理条件，故

$$\frac{f(x)}{F(x)}=\frac{f(x)-f(a)}{F(x)-F(a)}=\frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}\quad(\xi \text{ 在}x\text{ , }a\text{之间})$$

$$\therefore \quad \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{F(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}=\lim_{\xi\to a}\frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{F'(x)}$$

洛必达法则 $\boxed{\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{F(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{F'(x)}}$

推论1 定理1中 $x\to a$ 换为

$$x\to a^{+},\ x\to a^{-},\ x\to\infty,\ x\to+\infty,\ x\to-\infty$$

之一, 条件 2）作相应的修改 ， 定理1仍然成立.

推论 2 若 $\lim\dfrac{f'(x)}{F'(x)}$ 仍属 $\dfrac{0}{0}$ 型, 且 $f'(x), F'(x)$ 满足定理1条件, 则

$$\lim\frac{f(x)}{F(x)}=\lim\frac{f'(x)}{F'(x)}=\lim\frac{f''(x)}{F''(x)}$$

例1 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\alpha}-1}{x}$. $\left(\dfrac{0}{0}\right)$

解 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha(1+x)^{\alpha-1}}{1}=\alpha.$

例2 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-b^x}{x}.(a>0,b>0)$ $\left(\dfrac{0}{0}\right)$

解 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x\ln a-b^x\ln b}{1}=\ln\dfrac{a}{b}.$

例3 求 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x+2}{x^3-x^2-x+1}$.

$\dfrac{0}{0}$ 型

解 原式 $=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-3}{3x^2-2x-1}$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{6x}{6x-2} \neq \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{6}{6}=1$

注意： 不是未定式不能用洛必达法则 ！

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{6x}{6x-2}=\dfrac{3}{2}$

3.2.2 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型未定式

定理 3.2.3

1) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} F(x)=\infty$

2) $f(x)$与$F(x)$在$U^{o}(a)$内可导，且$F'(x)\neq 0$

3) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{F'(x)}$ 存在（或为∞）

$\Longrightarrow$ $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{F(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{F'(x)}$ （洛必达法则）

例4 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\dfrac{\pi}{2}-\arctan x}{\dfrac{1}{x}}$.

$\dfrac{0}{0}$型

解 原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-\dfrac{1}{1+x^2}}{-\dfrac{1}{x^2}}$

$=\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{1+x^2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x}{2x}=1$

$\dfrac{\infty}{\infty}$型

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\dfrac{1}{x^2}+1}=1$

例5 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^{\mu}}\ (\mu>0).$

$\dfrac{\infty}{\infty}$型

解 原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{x}}{\mu x^{\mu-1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\mu x^{\mu}}=0$

例6 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^{\mu}}{e^{\lambda x}}\ (\mu>0,\lambda>0).$

$\dfrac{\infty}{\infty}$型

解(1) μ为正整数的情形. 记 $\mu=n$

$$\text{原式}=\lim_{x\to+\infty}\frac{nx^{n-1}}{\lambda e^{\lambda x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{n(n-1)x^{n-2}}{\lambda^2 e^{\lambda x}}$$

$$=\cdots=\lim_{x\to+\infty}\frac{n!}{\lambda^n e^{\lambda x}}=0$$

例6 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^{\mu}}{e^{\lambda x}}$ $(\mu>0,\lambda>0)$.

(2) μ不为正整数的情形.

存在正整数$k=[\mu]$, 使当$x>1$时,

$x^{k}\le x^{\mu}<x^{k+1}$ 从而 $\dfrac{x^{k}}{e^{\lambda x}}\le\dfrac{x^{\mu}}{e^{\lambda x}}<\dfrac{x^{k+1}}{e^{\lambda x}}$ 两边夹准则

由(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^{k}}{e^{\lambda x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^{k+1}}{e^{\lambda x}}=0$ $\therefore$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^{\mu}}{e^{\lambda x}}=0$

注 (1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^{\mu}}{\ln x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{\lambda x}}{x^{\mu}}=\infty$, $(\mu>0,\lambda>0)$

表明：当$x\to+\infty$时：$\ln x$, $x^{\mu}\ (\mu>0)$, $e^{\lambda x}\ (\lambda>0)$

后者比前者趋于$+\infty$更快 .

(2)在满足定理条件的某些情况下洛必达法则不能解决计算问题．例如，

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{1} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

洛必达法则

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$$

而 $$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} = \lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{1}{x^2}+1} = 1$$

(3) 若 $\lim \dfrac{f'(x)}{F'(x)}$ 不存在 $(\neq \infty)$ 时,

$$\lim \frac{f(x)}{F(x)} \neq \lim \frac{f'(x)}{F'(x)}.$$

例如, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+\sin x}{x} \neq \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1+\cos x}{1}$

$\boxed{\text{极限不存在}}$

$$\|$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{\sin x}{x}\right) = 1$$

3.2.3 其他未定式: $0\cdot\infty,\ \infty-\infty,\ 0^0,\ 1^\infty,\ \infty^0$型

解决方法:

$\boxed{0^0, 1^\infty, \infty^0 \text{ 型}}$

洛必达法则

令 $y = f^g$

取对数

$\dfrac{0}{0}$ 型

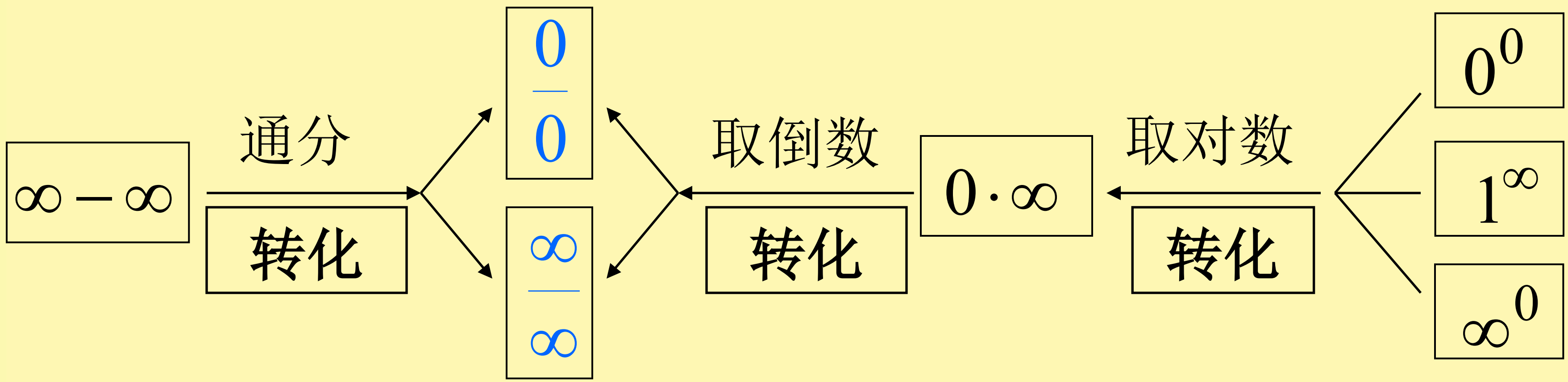
$\dfrac{\infty}{\infty}$ 型

$\boxed{\infty-\infty \text{ 型}}$

$\boxed{0\cdot\infty \text{ 型}}$

$$f-g=\frac{\frac{1}{g}-\frac{1}{f}}{\frac{1}{g}\cdot\frac{1}{f}}$$

$$f\cdot g=\frac{f}{\frac{1}{g}}$$



例7 求 $\lim\limits_{x\to 0^+} x^n \ln x \ (n>0).$ $\boxed{0\cdot\infty\text{型}}$

解 原式 $=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{x^{-n}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\frac{1}{x}}{-nx^{-n-1}}$

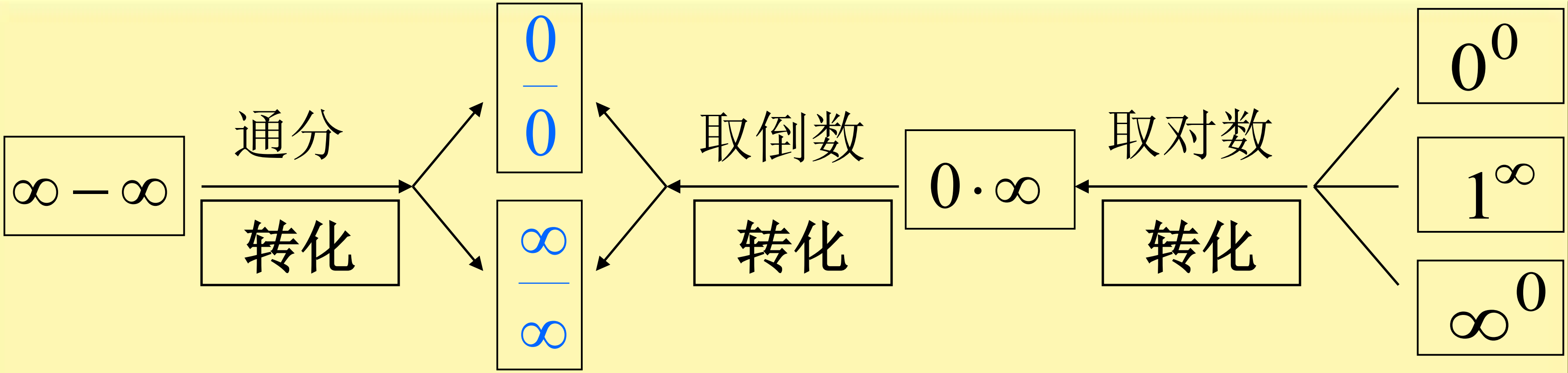
$$=\lim_{x\to 0^+}\left(-\frac{x^n}{n}\right)=0$$

$\boxed{\infty-\infty} \xrightarrow[\text{转化}]{\text{通分}} \boxed{\frac{0}{0}},\ \boxed{\frac{\infty}{\infty}} \xleftarrow[\text{转化}]{\text{取倒数}} \boxed{0\cdot\infty} \xleftarrow[\text{转化}]{\text{取对数}} \boxed{0^0},\ \boxed{1^\infty},\ \boxed{\infty^0}$

例8 求 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sec x-\tan x)$. $\boxed{\infty-\infty\text{型}}$

解 原式 $=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{1}{\cos x}-\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{1-\sin x}{\cos x}$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-\cos x}{-\sin x}=0$$



例9 求$\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$.

0^0型

解 $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x = \lim\limits_{x\to 0^+} e^{x\ln x} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x}$

$$\lim_{x\to 0^+} x^n \ln x = 0 \quad (n>0)$$

$= e^0 = 1$

3.2.4 综合例子:

例10 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x - x}{x^2\sin x}$.

$\boxed{\dfrac{0}{0}\text{型}}$

解 注意到 $\sin x \sim x$

原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x - x}{x^3} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sec^2 x - 1}{3x^2}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan^2 x}{3x^2}$

$\boxed{\sec^2 x = 1 + \tan^2 x}$

$=\dfrac{1}{3}$

例11. 求 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{3}{2}}\left(\sqrt{x+2}-2\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)$

分析： $\infty\cdot 0$ 型

原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x+2}-2\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{\dfrac{1}{x^{\frac{3}{2}}}}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+2}-2\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

例11. 求 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{3}{2}}\left(\sqrt{x+2}-2\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)$

解 令 $t=\dfrac{1}{x}$, 则

$$\text{原式} = \lim_{t\to 0^+}\frac{\sqrt{1+2t}-2\sqrt{1+t}+1}{t^2}$$

$$= \lim_{t\to 0^+}\frac{(1+2t)^{-\frac{1}{2}}-(1+t)^{-\frac{1}{2}}}{2t}$$

$$= \lim_{t\to 0^+}\frac{-(1+2t)^{-\frac{3}{2}}+\frac{1}{2}(1+t)^{-\frac{3}{2}}}{2} = -\frac{1}{4}$$

例12

$$f(x)=\begin{cases}\left[\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right]^{\frac{1}{x}}, & x>0,\\ e^{-\frac{1}{2}}, & x\le 0,\end{cases}$$

问f（x）在$x=0$处是否连续？

解 $$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+} e^{[\frac{1}{x}\ln(1+x)-1]\cdot\frac{1}{x}}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}}=e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{1+x}-1}{2x}}=e^{-\frac{1}{2}}$$

显然 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=f(0)=e^{-\frac{1}{2}}$ 所以f（x）在$x=0$处连续。

注：数列极限如何用洛必达法则

若 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n}$ 为 $\dfrac{0}{0}$ 或 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 不定型

（1） 设 $x_n = f(n)$，$y_n = F(n)$，若 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{F(x)} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f'(x)}{F'(x)}$ 存在，

则有 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f'(x)}{F'(x)}$

例1 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{a^n}(a>1)$，　　$\dfrac{\infty}{\infty}$ 型

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{a^n} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{a^x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x}{a^x\ln a}$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{2}{a^x(\ln a)^2} = 0$$

练习

求极限

1、$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}$

4、$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt[n]{n}-1)$

2、$\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{1}{x^2}-\cot^2 x)$

3、$\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{a^{x+1}+b^{x+1}+c^{x+1}}{a+b+c})^{\frac{1}{x}}$

1、 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}$ $\left(\dfrac{0}{0}\right)$

$$=\lim_{x\to0}\frac{e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}-e}{x}=\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{\frac{x}{1+x}-\ln(1+x)}{x^2}$$

$$=e\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{(1+x)^2}-\frac{1}{1+x}}{2x}\qquad=e\lim_{x\to0}\frac{-1}{2(1+x)^2}=-\frac{e}{2}$$

（或 $=e\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x^2(1+x)}$

$$=e\lim_{x\to0}\frac{-\ln(1+x)}{2x}=-\frac{e}{2}$$）

1、 $$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}\quad \left(\frac{0}{0}\right)$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+x}=1}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}-e}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e\left[e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)-1}-1\right]}{x}$$

$$=e\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}\ln(1+x)-1}{x}=e\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}$$

$$=e\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}-1}{2x}=e\lim_{x\to 0}\frac{-1}{2(1+x)}=-\frac{e}{2}$$

2、$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\cot^2 x\right)$ $(\infty-\infty)$

解 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan^2 x-x^2}{x^2\tan^2 x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x+x}{x}\cdot\frac{\tan x-x}{x^3}$$

$$=2\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-x}{x^3}=2\lim_{x\to 0}\frac{\sec^2 x-1}{3x^2}$$

$$=2\lim_{x\to 0}\frac{\tan^2 x}{3x^2}=\frac{2}{3}$$

3、 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^{x+1}+b^{x+1}+c^{x+1}}{a+b+c}\right)^{\frac{1}{x}}$ (1^{∞})

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\frac{a^{x+1}+b^{x+1}+c^{x+1}}{a+b+c}}{x}}$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{a^{x+1}\ln a+b^{x+1}\ln b+c^{x+1}\ln c}{a^{x+1}+b^{x+1}+c^{x+1}}}$$

$$= e^{\frac{a\ln a+b\ln b+c\ln c}{a+b+c}} = (a^a b^b c^c)^{\frac{1}{a+b+c}}$$

另解 $\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^{x+1}+b^{x+1}+c^{x+1}}{a+b+c}\right)^{\frac{1}{x}}$

$$= e^{\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{a^{x+1}+b^{x+1}+c^{x+1}}{a+b+c}-1\right)}$$

$$= e^{\lim_{x\to 0}\frac{a^{x+1}+b^{x+1}+c^{x+1}-a-b-c}{(a+b+c)x}}$$

$$= e^{\lim_{x\to 0}\frac{a^{x+1}\ln a+b^{x+1}\ln b+c^{x+1}\ln c}{(a+b+c)}}$$

$$= e^{\frac{a\ln a+b\ln b+c\ln c}{a+b+c}}$$

4、$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt[n]{n}-1)$ 直接用罗必塔法则

$$\because \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$$

$$\therefore \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{\ln x}{x}}=1$$

解. 先求 $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}(\sqrt[x]{x}-1)$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{\frac{1}{x}\ln x}-1}{x^{-\frac{1}{2}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{\frac{1}{x}\ln x}\left(\frac{1-\ln x}{x^2}\right)}{-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2(1-\ln x)}{\sqrt{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2\left(-\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}}=0$$

所以，$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt[n]{n}-1)=0$

4、$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt[n]{n}-1)$

解. 先求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}(\sqrt[x]{x}-1)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{\frac{1}{x}\ln x}-1}{x^{-\frac{1}{2}}}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}\ln x}{x^{-\frac{1}{2}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}}=0$$

所以，$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt[n]{n}-1)=0$

$\because \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$

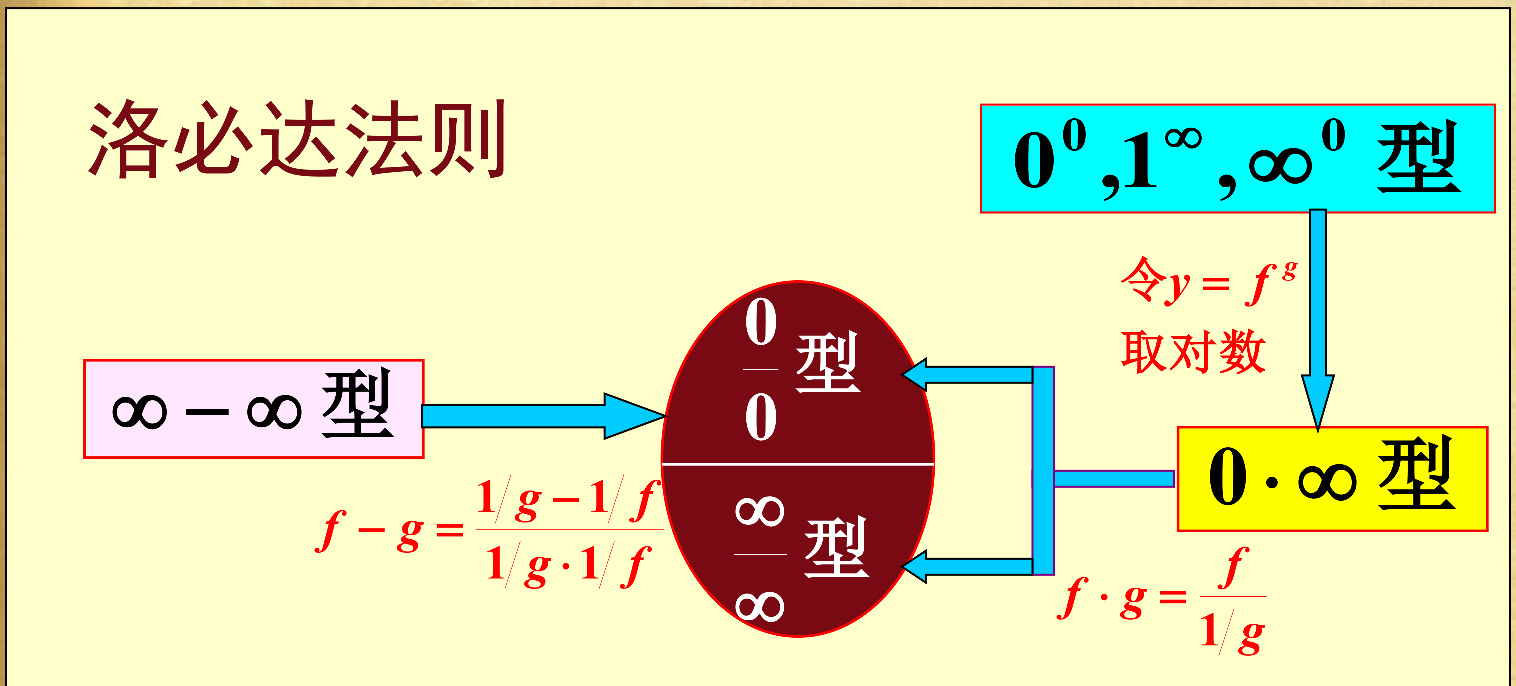
小结论：$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$

解. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[x]{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{\frac{1}{x}\ln x}$

$=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\ln x}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}}=e^{0}=1$

内容小结

1、熟练掌握利用洛必达法则求极限的方法。



作业　习题3.2